<u>מבוא לתהליכים סטוכסטיים/ שיעור 10</u>

שלומי

מתקיים $P_{i,j}(t+h)=\sum_k P_{i,k}(t)P_{k,j}(h)$

(לפי הסתברות שלמה כאשר משקללים את הסתברויות המעבר בזמן $t+h$ לפי זהות המצבים שבהם יכולים להמצא בזמן ביניים t).

לכן נקבל $P_{i,j}(t+h)=P_{i,j}(t)\left(1-\lambda_j h+o(h)\right)+\sum_{k\neq j}P_{i,k}(t)\left(\lambda_{k,j}h+o(h)\right)$

(אם בזמן t נמצאים במצב j , אז צריך לאחר פרק זמן באורך h שוב להיות בו, ואם בזמן t נמצאים במצב אחר, אז צריך לעבור למצב j).

אם נעביר אגפים ונחלק ב h, אז נקבל $\frac{P_{i,j}(t+h)-P_{i,j}(t)}{h}=-\lambda_j P_{i,j}(t)+\sum_k P_{i,k}(t)\lambda_{k,j}+o(h)$

אם נשאיף את h לאפס נקבל $P^{\backslash}_{i,j}(t)=-P_{i,j}(t)\lambda_j+\sum_{k\neq j}P_{i,k}\lambda_{k,j}$

המטריצה $\Lambda=\left(\lambda_{i,j}\right)$ כאשר $\lambda_{i,i}=-\lambda_i$ נקראת היוצר האינפיניטיסימלי.

המטריצה $P(t)=\left(P_{i,j}(t)\right)$ היא מטריצת המעבר בזמן t.

המטריצה $P^{\backslash}(t)=\left(P^{\backslash}_{i,j}(t)\right)$ היא מטריצת הנגזרות של הסתברויות המעבר.

קבלנו מערכת משוואות דיפרנציאליות $P^{\backslash}(t)=P(t)\Lambda$.

בשלב מאוחר יותר נגיע לשימושים במערכות כאלה כדי לחשב הסתברויות מעבר בזמן קבוע.
אך בשלב זה נעבור לעיסוק בוקטורי הסתברויות סטציונריות שהם וקטורים של נקודות שבת.

נניח ש π הוא וקטור הסתברויות סטציונריות, אז צריך להתקיים עבור כל $h>0$:

$\pi_j=\sum_i \pi_i P_{i,j}(h)$ כלומר $\pi_j=\left(\sum_{i\neq j}\pi_i\lambda_{i,j}h+o(h)\right)+\pi_j\left(1-\lambda_j h+o(h)\right)$.

נחלק ב h ונשאיף את h לאפס ונקבל $\sum_j \pi_i\lambda_{i,j}=0$, כלומר הוקטור הסטציונרי פותר את מערכת המשוואות $\pi\Lambda=0$.

<u>דוגמא</u> למציאת וקטור הסתברויות סטציונרי

נתונה שרשרת מרקוב בזמן רציף עם יוצר אינפיניטיסימלי

$$\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

מצאו וקטור הסתברויות סטציונרי.

מתקיים

$$\begin{cases}\pi_1+\pi_2+\pi_3=1\\ (-2)\pi_1+\pi_2+\pi_3=0\\ \pi_1-2\pi_2=0\\ \pi_1+\pi_2-\pi_3=0\end{cases}$$

ונקבל פתרון שהוא וקטור סטציונרי.

<u>אינטואיציה</u>: למעשה במצב שיווי משקל עוצמת הזרם שנכנס למצב שווה לעוצמת הזרם שיוצא מהמצב. כך למשל בדוגמא זו מהמצב הראשון יוצאים בעוצמה 2 , נכנסים אליו בעצמה 1 מהמצב השני ונכנסים אליו בעוצמה 1 מהמצב השלישי.

<u>דוגמא</u>: תהליך פואסון עם קצב λ
ביוצר האינפינטיסימלי כאן $\Lambda_{i,i+1} = \lambda$ ו $\Lambda_{i,i} = -\lambda$ עבור כל i. יתר האיברים הם אפס.
כאן אין פתרון שונה מוקטור האפס למערכת למציאת וקטור סטציונרי. לכן אין וקטור סטציונרי. זה מבטא את העובדה שכל המצבים הם חולפים.

ראינו שבתהליך פואסון, בכל מצב טבעי ממתינים זמן המתפלג מעריכית (אותו פרמטר מעריכי לכל מצב) ואז עוברים לטבעי הבא. שרשרת מרקוב בזמן רציף היא מקרה כללי יותר. בכל מצב ממתינים זמן מעריכי ואז עוזבים אותו. אבל, לכל מצב יכול להיות פרמטר אחר להתפלגות המעריכית. כמו כן יכולים לעבור למצבים שונים. לגבי כל מצב יש התפלגות של המצב הבא שאליו עוברים. כך יש מטריצת מעבר בזמני הקפיצות שמייצגת את הסתברויות המעבר למצבים השונים מכל מצב.
בתהליך בזמן בדיד יש יחידות זמן שבהן יכולים לעבור ממצב למצב. בתהליך בזמן רציף אין יחידות זמן קבועות. במצב נתון ממתינים זמן המתפלג מעריכית (עם פרמטר המאפיין את המצב) ואז עוברים למצב אחר, כאשר זהות המצב האחר נקבעת לפי שורה במטריצת המעבר של זמני הקפיצות.

לכל שרשרת מרקוב בזמן רציף קיימת מטריצה ריבועית של <u>יוצר אינפיניטיסימלי</u> שמתארת אותו.
במטריצה זו באים לידי ביטוי קצבי המעברים בין המצבים השונים. על האלכסון הראשי, באים לידי ביטוי קצבי העזיבה של המצבים השונים. אם במצב i שוהים זמן בעל התפלגות $\exp(\lambda_i)$, אז האיבר ה i,i של היוצר הוא $-\lambda_i$. הסימן השלילי מבטא את העובדה שכאשר נמצאים במצב i, יש מאזן הגירה שלילי ממצב i. עבור כל $i \neq j$, האיבר ה i,j מייצג את קצב המעבר ממצב i למצב j .
יתכן שממצב i לא נעבור למצב j , אבל איבר זה מייצג את עוצמת ההגירה ממצב i למצב j כאשר נמצאים במצב i.
בכל פרק זמן באורך h שבו נמצאים במצב i יש הסתברות של $\lambda_{i,j}h + o(h)$ שנעבור ממצב i למצב j . ההסתברות שבפרק זמן זה נעזוב את מצב i לאיזשהו מצב היא $\lambda_i h + o(h)$ כאשר $\lambda_i = \sum_{j\neq i}\lambda_{i,j}$. כאשר נמצאים במצב i, ההסתברות שכאשר נעזוב את מצב i, נעבור למצב j היא איבר במטריצת המעבר של זמני הקפיצות.

<u>דוגמא</u>
לבנק מגיעים לקוחות בזרם בעוצמה λ . בבנק יש שרת אחד ואינסוף מקומות המתנה. משך שירות מתפלג מעריכית עם פרמטר μ . מהו היוצר האינפיניטיסימלי ?
<u>פתרון</u>
מתקבלת מטריצה אינסופית שבכל אחד מהאיברים שבאלכסון שמשמאל לאלכסון הראשי מופיע μ ובאלכסון שמימין לאלכסון הראשי מופיע λ ובאלכסון הראשי מופיע הנגדי של סכומם כאשר יתר האיברים הם אפס. אברי המטריצה השונים מאפס הם: $\Lambda_{0,0} = -\lambda$, $\Lambda_{0,1} = \lambda$ ועבור $i \geq 1$:
$\Lambda_{i,i-1} = \mu$, $\Lambda_{i,i+1} = \lambda$, $\Lambda_{i,i} = -(\mu+\lambda)$.

$$\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & & \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \\ 0 & & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \end{pmatrix}$$

דוגמא

כעת נניח שזרם המגיעים הוא בעוצמה λ ויש שרת אחד ושני מקומות המתנה.
מרחב המצבים הוא כעת $\{0,1,2,3\}$ שמייצגם את מספר הפרטים שבמערכת בזמן נתון. היוצר הוא

$$\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ 0 & 0 & \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

לקוח שמגיע במצב בו המערכת מלאה נדחה.

דוגמא

מופע הצרכנים לתור הוא פואסוני בעוצמה λ. יש אין סוף שרתים וכל צרכן שמגיע לתחנה מתקבל מיד לשרות. קצב השרות של כל שרת הוא μ.
מתקיים עבור כל $i \ge 0$ $\Lambda_{i,i+1} = \lambda$ ועבור כל $i \ge 1$: $\Lambda_{i,i-1} = i\mu$ ואברי האלכסון הם בהתאם.
הסבר: יש כאן סכום של i זרמים ממצב i למצב $i-1$ כאשר כל אחד מהם הוא בעוצמה μ.

דוגמא

כעת נניח שיש שלושה שרתים ויתר הנתונים לא השתנו.
במקרה זה מתקים $\Lambda_{1,0} = \mu$, $\Lambda_{2,.1} = 2\mu$ ועבור כל $i \ge 3$ מתקיים $\Lambda_{i,i-1} = 3\mu$ ושוב אברי האלכסון הם בהתאם. קצב השרות תלוי במספר השרתים שנותנים שרות. אף פעם לא יהיו יותר משלושה שרתים פעילים.

מטריצת מעבר בזמן הקפיצות

נתונה שרשרת מרקוב בעלת יוצר אינפיניטיסימלי

$$\begin{pmatrix} -6 & 4 & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

מטריצת המעבר בזמן הקפיצות היא

0	$\frac{4}{6}$	$\frac{2}{6}$
$\frac{2}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
1	0	0

שעון פואסוני

אמרנו שבכל מצב שוהים זמן שמתפלג מעריכית ואז עוברים למצב אחר בהתאם להתפלגות שנתונה במטריצת המעבר. נרצה כאן שהקפיצות יהיו בהתאם לשעון אחיד שנתון לכל המצבים.

דוגמא

נתונה שרשרת מרקוב בזמן רציף בעלת שלושה מצבים ובעלת היוצר

$$\begin{pmatrix} -6 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & 3 \\ 1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

מטריצת המעבר בזמן הקפיצות היא

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{6} & \frac{2}{6} \\ \frac{3}{6} & 0 & \frac{3}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \end{pmatrix}$$

אם ידוע שהיו בדיוק k קפיצות אז הסתברויות המעבר נתונות בעזרת החזקה ה- k של מטריצה זו.
אם לא ידוע מספר הקפיצות אז התהליך כולו יכול להיות מתואר ע"י טור המטריצות:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-6t}(6t)^k}{k!} \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & \frac{4}{6} & \frac{2}{6} \\ \hline \frac{3}{6} & 0 & \frac{3}{6} \\ \hline \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ \hline \end{array} \right)^k$$

(ההסתברות שיהיו בדיוק k קפיצות היא $e^{-6t}\frac{(6t)^k}{k!}$).

יש בעיה אם קצב העזיבה של מצבים שונים הוא שונה. איך נתגבר: נבחר קצב אחיד שגדול לפחות כמו קצב העזיבה מהמצב שאותו עוזבים בממוצע הכי מהר. את המצבים השונים לא בהכרח נעזוב כאשר תעבור יחידת זמן. ההסתברות להישאר במצב תשתנה בהתאם למצב.
<u>דוגמא</u> לכך:
שרשרת בעלת יוצר

$$\begin{pmatrix} -8 & 4 & 4 \\ 4 & -6 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

קצב השעון צריך להיות לפחות 8. אם נקבע קצב של 8 אז התהליך יכול להיות מתואר כטור

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-8t}(8t)^k}{k!} \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & \frac{4}{8} & \frac{4}{8} \\ \hline \frac{6}{8}\cdot\frac{4}{6} & \frac{2}{8} & \frac{6}{8}\cdot\frac{2}{6} \\ \hline \frac{2}{8}\cdot\frac{1}{2} & \frac{2}{8}\cdot\frac{1}{2} & \frac{6}{8} \\ \hline \end{array} \right)^k$$

הסבר

משך הזמן בין יחידת מעבר ליחידה הבאה מתפלג מעריכית עם קצב 8. אך כאשר נמצאים במצבים שאותם עוזבים בקצב ממוצע איטי יותר אז בסיכוי מסוים נשארים במצב. זה בא לידי ביטוי כאן בכך שחלק מאברי האלכסון אינם אפס.

ניתן להציג את התהליך כטור מטריצות עם שעון בעל קצב מהיר יותר שבו בכל המצבים יהיה סיכוי להשתהות בזמני הפעימה של השעון. למשל נציג את התהליך עם שעון עם קצב 16:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-16t}(16t)^k}{k!}\begin{pmatrix}\frac{8}{16} & \frac{8}{16}\cdot\frac{4}{8} & \frac{8}{16}\cdot\frac{4}{8}\\ \frac{6}{16}\cdot\frac{4}{6} & \frac{10}{16} & \frac{6}{16}\cdot\frac{2}{6}\\ \frac{2}{16}\cdot\frac{1}{2} & \frac{2}{16}\cdot\frac{1}{2} & \frac{14}{16}\end{pmatrix}^k$$

באמצעות שעון פואסוני אפשר לחשב הסתברויות מעבר בזמן קבוע t. אבל המטרה העיקרית בהצגתו היא שפיכת אור על מבנה התהליך של שרשרת בזמן רציף.

נחזור לחישוב הסתברויות מעבר בזמן קבוע.

דוגמא

שרשרת עם יוצר אינפיניטיסימלי

$$\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}$$

מצאו את $P_{1,2}(t)$ כאשר t הוא זמן קבוע.

הדרך לפתרון

מקבלים משוואה דיפרנציאלית $P_{1,2}'(t)=P_{1,1}(t)-2P_{1,2}(t)$ ויש גם תנאי התחלה $P_{1,2}(0)=0$.

הסבר לתנאי ההתחלה: כשמתחילים במצב 1 אז בזמן 0 נמצאים במצב 1. כך $P_{1,1}(0)=1$ ו $P_{1,2}(0)=0$
.

קבלנו משוואה דיפרנציאלית שקושרת בין המשתנה לבין נגזרתו.

נתנו כבר הוכחה לתקפות משוואות מסוג זה. נתן פה גם הסבר אינטואיטיבי: אם נמצאים במצב 2 אז יש "איום" לעזוב אותו בעצמה 2 ואם נמצאים במצב 1 אז נכנסים למצב 2 בעצמה 1.

נשים לב שיש גם משוואה דיפרנציאלית בעלת אותה צורה

$$P_{2,2}'(t)=P_{2,1}(t)-2P_{2,2}(t)$$

אבל $P_{2,2}(t)$ לא שווה ל $P_{1,2}(t)$ בגלל תנאי ההתחלה השונים: $P_{2,2}(0)=1$ ו $P_{2,1}(0)=0$.

הערה: מתקיים $\lim_{t\to\infty}P_{2,2}(t)=\lim_{t\to\infty}P_{1,2}(t)=\pi_2$ אבל אין שיוויון עבור t קבוע.

מכיון שיש רק שני מצבים אז מתקיים $P_{2,1}(t)=1-P_{2,2}(t)$. לכן נוכל לקבל משוואות שבכל אחת מהן יש רק משתנה אחד למשל: $P_{2,2}'=(1-P_{2,2}(t))-2P_{2,2}(t)$ ומתקבלת משוואה:

$$P_{2,2}'=1-3P_{2,2}(t)$$

נצטרך להתגבר על משוואות דיפרנציאליות מהצורה $y'=ay+b$.

נשים לב שעבור הפונקציה $y=e^{at}$ מתקיים $y^{'}=ae^{at}$. נשתמש בעובדה זו ובעובדה שהנגזרת של קבוע היא אפס. כך אם $y=c_1e^{at}+c_2$ אז $y^{'}=c_1ae^{at}$.

צריך לבחור מקדם c_2 כך שהאיבר החופשי יתקזז. לכן צריך להתקיים $c_2=-\frac{b}{a}$. כעת נשאלת השאלה איך לבחור את c_1. כאן כדי לפתור את המשוואה יש לנו חופש תמרון. אם יש לנו תנאי התחלה אז צריך להתאים את בחירת c_1 לתנאי ההתחלה.

נחזור לאחת המשוואות שבהן עסקנו: $P_{2,2}^{'}(t)=1-3P_{2,2}(t)$.

מתקיים $P_{2,2}(t)=\frac{1}{3}+c_1e^{-3t}$. מתקיים $e^{-3\cdot 0}=1$ לכן כדי לקיים את תנאי ההתחלה $P_{2,2}(0)=1$ צריך לבחור $\frac{1}{3}+c_1=1$ או $c_1=\frac{2}{3}$. לכן מתקיים $P_{2,2}(t)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}e^{-3t}$. נשים לב שכאשר $t\to\infty$ אז $P_{2,2}(t)$ שואף ל $\frac{1}{3}$ (כי $\lim_{t\to\infty}e^{-3t}=0$). $\frac{1}{3}$ זאת היא ההסתברות הסטציונרית של מצב 2. למעשה קיבלנו דרך אלטרנטיבית לחשב כאן את ההסתברות הגבולית שאותה ידענו כבר. במקרים יותר מסובכים נוכל בעזרת ידיעת ההסתברות הגבולית לקבל תנאי שפה נוסף שיקל עלינו את מציאת הפתרון.

נראה גם דרך כללית לפתירת משוואות דיפרנציאליות מהסוג שבו נתקלנו.
משוואות מהצורה $y^{/}+a(x)y=b(x)$ נקראות משוואות דיפרנציאליות לינאריות מסדר ראשון.
המקדמים לא תלויים במשתנה y והסדר הכי גבוה של הנגזרות הוא ראשון. $a(x)$ ו $b(x)$ הן פונקציות של x.
נכפיל את שני אגפי המשוואה בגודל $e^{A(x)}$ כאשר $A(x)=\int a(x)dx$.
נקבל משוואה $e^{A(x)}y^{/}+e^{A(x)}a(x)y=e^{A(x)}b(x)$.
נשים לב שאגף שמאל הוא הנגזרת של $e^{A(x)}y$. לכן נקבל משוואה $\left(e^{A(x)}y\right)^{/}=b(x)e^{A(x)}$. נעשה אינטגרציה על שני האגפים. באגף שמאל האינטגרל של הנגזרת הוא הפונקציה המקורית. נקבל $e^{A(x)}y=\int b(x)e^{A(x)}dx+c$.
כך נקבל $y=e^{-A(x)}\left(\int b(x)\,e^{A(x)}dx+c\right)$.
זו היא נוסחת פתרון סגורה. כדי לפתור את המשוואה כך צריך רק לעשות שתי פעולות אינטגרציה ואז להציב. נוסחא סגורה מבטלת את הצורך בניחוש פתרון. אבל לפעמים הניחוש הוא החלק היפה.
במקרה שבו נתקלנו בטיפול בשרשרות מרקוב היו הפונקציות $a(x)$ ו $b(x)$ קבועות.
אם יש משוואה $y^{/}+ay=b$ אז $A(x)=\int adx=ax$.
נקבל אוסף פתרונות $y=e^{-ax}\frac{b}{a}e^{ax}+ce^{-ax}=\frac{b}{a}+ce^{-ax}$.